Einleitung.

Unter dem „Jugendtraum *Kroneckers*" *) versteht man das Theorem, daß man jede algebraische Gleichung, die im Rationalitätsbereich eines quadratischen imaginären Körpers eine *Abel*sche Gruppe hat, durch Einheitswurzeln und durch Wurzeln der Gleichungen der komplexen Multiplikation lösen kann. Die Gleichungen der komplexen Multiplikation sind dabei jene Gleichungen, denen die vollständige Invariante,**) die aus der Theorie der elliptischen Funktionen entspringende Modulfunktion, genügt, falls man nur ihr Argument die Zahlen der imaginären quadratischen Zahlkörper durchlaufen läßt.

Dieses Theorem beantwortet einen Spezialfall eines allgemeinen, gegen dessen Lösung die vorliegende Arbeit hinsteuert. Dieses läßt sich folgendermaßen formulieren: Gegeben ein *Galois*scher Körper k. Dann gibt es ein Funktionensystem, das die Wurzeln aller *Abel*schen Gleichungen im Rationalitätsbereich k liefert, falls nur das Argument jeder Funktion alle Zahlen eines bestimmten, zur Funktion gehörenden und in k enthaltenen Bereichs durchläuft.***)

---

*) Vergl. *Kronecker*: Bericht der königl. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1877. S. 851. Festschrift zu *Kummers* Doktorjubiläum (*Crelle* Bd. 92). S. 67 ff. *Hilbert:* Über die Theorie der relativ-quadr. Zahlkörper. Jahresbericht der deutsch. math. Vereinig. Bd. VI. Math. Probleme. Göttinger Nachrichten der k. Ges. d. Wiss. 1900. S. 277. 12. Problem.

**) *Weber:* Ellipt. Funktionen. (1891.) S. 124.

***) Vergl. *Hilbert:* Mathemat. Probleme a. a. O. Dort wird besonders auch auf die große Bedeutung hingewiesen, die das Problem für die Funktionentheorie hat.

Der Reiz der Beantwortung dieser Frage liegt darin, daß daran Funktionentheorie, Algebra und Zahlentheorie gleichermaßen beteiligt sind.

Die *Funktionentheorie* liefert die *Existenzbeweise*. Wie schon in der elementaren Algebra der Beweis von der Existenz der Wurzel einer algebraischen Gleichung im Gebiete der komplexen Zahlen von der Funktionentheorie geliefert wird, so gibt sie uns hier die Existenz von algebraischen Gleichungen mit ausgezeichnetem Charakter, d. h. sie gibt uns zu gegebener Gruppe und Diskriminante in einem Körper k die zugehörige Gleichung. Wir werden auch sehen, daß sie uns in der Zahlentheorie die Existenz einer bestimmten möglichen Anzahl von Geschlechtern liefern wird, in die man ein gewisses System von Klassen von k einteilen wird.

Die *Algebra* gibt uns die *Gruppe* und damit den Begriff der Irreduzibilität. Die Gruppe liefert zugleich die Zerfällungsgesetze der Primzahlen, wie die grundlegende Arbeit *Hilberts**) gezeigt hat.

Die *Zahlentheorie* endlich gibt den Zusammenhang zwischen *Diskriminante* und Gruppe und damit das bindende Glied zwischen *Algebra* und Funktionentheorie. Ihr gelingt es schließlich, den Beweis der *Vollständigkeit* des durch die Funktionentheorie gelieferten Systems von Gleichungen zu geben.

Die vorliegende Arbeit ist rein *zahlentheoretisch*. Sie supponiert stets die Existenz von Gleichungen mit bestimmter Gruppe und bestimmter Diskriminante und entwickelt hieraus eine Theorie dieser Gleichungen. Diese Theorie wird so weit geführt, daß sie in dem Falle, wo Funktionentheorie und Algebra schon das Ihre getan haben, nämlich im *Falle der komplexen Multiplikation, ausreicht zum Beweise des Kroneckerschen Jugendtraumes*. Worin besteht nun diese Theorie? Die wesentlichen Züge derselben sind die folgenden:

Schon *Kronecker***) hatte die Vermutung ausgesprochen, daß die Relativdiskriminante des Klassenkörpers der komplexen Multiplikation in bezug auf den zugehörigen quadratischen Ring (bezw. Ordnung)***) nur die Primzahlen von dessen Diskriminante enthalten könne. Diese Aussage wird dahin präzisiert, daß *die Relativdiskriminante jener Körper nur die Primzahlen des Führers des zugehörigen Ringes enthalten könne.*

---

*) *Hilbert:* Theorie der algebr. Zahlkörper. Bericht der deutschen Math. Vereinigung. Bd. IV. Zweiter Teil: *Galois*scher Zahlkörper. S. 247 ff.

**) *Kronecker:* Bericht der königl. Ges. der Wiss. zu Berlin a. a. O.

***) Vergl. *Weber:* Ellipt. Funktionen. 14. Abschnitt. S. 423 ff.

Ebenso nimmt die allgemeine Theorie alle verschiedenen Primideale der Relativdiskriminante der gegebenen *Abel*schen Gleichung in bezug auf k und bildet mit dem Produkt derselben den *Führer eines Zahlstrahls.**) Derselbe ist ein gewisser Bereich von Zahlen, der mittels des Führers genau definiert wird, und der in den einfachsten Fällen ein regulärer Ring oder selbst ein Körper werden kann.

Dieser Begriff des Strahles hat sich für die ganze Theorie als von größter Wichtigkeit herausgestellt. Der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit Sätzen über diesen Strahl. Vor allem muß seine *Klassenanzahl* durch den Relativgrad der gegebenen Gleichung teilbar sein, und man kann Klassen derselben angeben, deren *Abel*sche Gruppe mit der Gruppe der Relativgleichung holoëdrisch isomorph ist. *Der größte Relativkörper, dessen Relativdiskriminante keine andern Primideale enthält, als die in den Führer ein für allemal aufgenommenen, hat die Klassenanzahl des Strahles als Relativgrad und die Gruppe der Strahlklassen zur Gruppe.* Ich nenne ihn den *Stern * des Führers f*, da n alle möglichen Strahlen vereinigt für einen gegebenen Führer. Das anfangs ausgesprochene Problem kann aber auch so formuliert werden: *Es ist die Existenz des Sternes * zu beweisen.* In dieser Theorie ist die alte Theorie des *Klassenkörpers* vollständig enthalten. *Derselbe ist ein * des Führers* (1).**)

Als Beispiel diene für den Strahl mit dem Führer (p) (p eine Primzahl) im Gebiet der rationalen Zahlen die Angabe, daß die p-ten Einheitswurzeln den gewünschten * mit dem Führer (p) liefern. Dagegen liefern die p-ten Einheitswurzeln zusammen mit der zum Ring mit dem Führer (p) gehörigen Klassengleichung der komplexen Multiplikation den gewünschten * mit dem Führer (p) im Gebiete des quadratischen imaginären Körpers.

Außer diesem Teile der zahlentheoretischen Theorie unserer Glei-

*) Vergl. Kap. II der vorliegenden Arbeit.

**) Über die Theorie der *Klassenkörper* siehe *Hilbert:* Über die Theorie der relativ *Abel*schen Zahlkörper. Gött. Nachr. 1898, S. 370 und Acta math. *Abel*-Festband, 26. Bd. S. 99. Nachdem hier die Theorie begründet wurde, ist sie allgemein bewiesen worden von *Furtwängler* in den Arbeiten: *Ph. Furtwängler:* Über die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper, die eine l-te Einheitswurzel enthalten. Gött. Nachr. 1903, S. 202 u. 282. Derselbe: Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper, Gött. Nachr. 1904, S. 173. Siehe auch den Satz 4 auf S. 195. Zu dieser Theorie hat auch beizutragen gesucht: *F. Bernstein* in den Göttinger Nachr. 1903, S. 46 u. 305.

chungen ist aber auch der Zerfällung der Primzahlen ein großes Interesse zu schenken. Und hier wieder ergeben die Klassen des Strahls die entscheidenden Gesichtspunkte. Die in der Relativdiskriminante aufgehenden Primzahlen unterliegen nämlich gewissen Kongruenzbedingungen, die im I. Teil der vorliegenden Arbeit auseinandergesetzt werden und dort eins der für den II. Teil wichtigsten Resultate ausmachen. Mit Hilfe derselben gelingt es, ein gewisses System von Klassen, das sogenannte *Relativstrahlklassensystem* in Geschlechter einzuteilen. Der Hauptsatz des II. Teils ist dann der Satz, daß nicht alle überhaupt möglichen Geschlechter existieren, sondern nur ein bestimmter Teil, genau wie in der elementaren Theorie des quadratischen Körpers. Daß dieser noch übrig bleibende Teil von Geschlechtern existieren muß, ist von der Funktionentheorie zu zeigen, ein Beweis, wie sie ihn im Falle der komplexen Multiplikation wirklich liefert. Es folgt dann, daß die Zerfällung der Primideale nur von der Klasse des Strahls abhängig ist, in der dieselben liegen.

Der Satz, daß aber nicht alle überhaupt möglichen Geschlechter existieren, ist in gewissem Sinne nichts anderes als das *Reziprozitätsgesetz.* Durch den Existenzbeweis *des Sternes* * wird also zugleich auch das allgemeinste Reziprozitätsgesetz gefunden.

Die soweit durchgeführte Theorie des Strahles, bezw. Sternes erlaubt dann, das zuerst genannte Problem zu lösen, falls das Funktionensystem so erforscht ist, wie es im Falle der komplexen Multiplikation ist. Zunächst erlaubt der Satz über die Geschlechter den Beweis, daß die Relativdiskriminante der Gleichungen der komplexen Multiplikation nur die Primzahlen des Führers des zugehörigen Strahles bezw. Ringes enthält. Denn wir kennen die Zerlegungsgesetze aus der Funktionentheorie. Andere Primzahlen in der Diskriminante als die des Führers würden aber ein Geschlecht geben, das nicht existieren darf, dessen unendlich viele Primideale des quadratischen Körpers also nicht zerfallen dürfen, was gegen das Zerlegungsgesetz wäre. *Damit ist dann aber die Existenz des Sternes bewiesen,* und die weitere Theorie des Strahles beweist, daß es auch nur *ein* solches System geben kann.

Da die Funktionentheorie erst in den beiden einfachsten Fällen die Funktionen geliefert hat, die unser erstes Problem erledigen, so schwebt unsere ganze Theorie in der Luft.*) Ich habe deshalb jeweils die Anwendung

*) Vergl. den Vortrag von *Blumenthal*, gehalten auf der Jahresversammlung der deutsch. Math. Vereinigung in Kassel 1903.

im Falle der komplexen Multiplikation angefügt, da dieselbe das interessanteste, bis jetzt bekannte Beispiel liefert.

Noch ein Wort über die Bezeichnungen und Begriffe. Ich habe den *Hilbertschen Zahlbericht**) als „standard work" betrachtet und mich ganz an die dortige Bezeichnung und Begriffsbildung gehalten. Auch meine Verweise gelten fast immer nur jenem Werk, da man ja dort leicht die weitere Literatur wird finden können.

Für den Leser habe ich zu besserem Verständnis an den Kopf jedes Kapitels das Hauptresultat desselben gesetzt.

I. Teil.

I. Kapitel. *Vereinfachung.*

Hauptsatz: Jede algebraische Gleichung, die in einem *Galois*schen Körper k vom Grade m als Rationalitätsbereich eine *Abel*sche Gruppe besitzt, läßt sich zurückführen auf ein System von Gleichungen mit folgenden Eigenschaften:

a) ihre Koeffizienten sind rationale Zahlen;

b) der Grad ist eine Primzahlpotenz;

c) die Gruppe der Gleichung ist in k eine *Abel*sche und ihre Basis besteht aus höchstens m Substitutionen, alle von demselben Grade.

Komplexe Multiplikation: Jede algebraische Gleichung, die in einem quadratischen Körper als Rationalitätsbereich eine *Abel*sche Gruppe besitzt, läßt sich auflösen durch eine Reihe von Gleichungen mit folgenden Eigenschaften:

a) die Koeffizienten der Gleichung sind rational;

b) der Grad ist eine Primzahlpotenz;

c) die Gruppe ist zyklisch in k.

1. Es sei

$$(1.)\qquad \Theta^n - \vartheta_1\Theta^{n-1} + \vartheta_2\Theta^{n-2} - \cdots - (-1)^n\vartheta_n = 0$$

eine algebraische Gleichung vom n-ten Grade, deren Koeffizienten Zahlen irgend eines algebraischen Körpers sind. Wir wollen im folgenden die

*) *Hilbert* a. a. O. Das schon anfangs zitierte Werk *Hilberts* im Bericht der deutsch. Math.-Vereinig. Bd. IV wird in der Folge stets kurz als „Zahlbericht" zitiert werden.

Theorie des Körpers (Θ) entwickeln in bezug auf einen Körper k, falls die Gruppe von (1.) in k als Rationalitätsbereich eine *Abel*sche ist. Wir betrachten somit das zahlentheoretische Verhältnis jedes algebraischen Körpers in bezug auf einen andern, wenn seine *Galois*sche Gruppe im letzteren eine *Abel*sche ist.

Wir zeigen zunächst, daß sich die Gleichung (1.) auf ein System von Gleichungen mit bestimmten Eigenschaften zurückführen läßt, so daß durch alleinige Behandlung einer Gleichung des Systems auch die Theorie von (1.) gegeben wird. Erst diese Gleichungen stehen in einem einfachen und durchsichtigen zahlentheoretischen Zusammenhang mit dem Körper k.

Zunächst können wir annehmen, die Gleichung (1.) habe eine zyklische Gruppe, da wir *Abel*sche Gleichungen immer auf solche zurückführen können. Ferner kann n immer zu einer Primzahlpotenz gemacht werden. Die zyklische Substitution von (1.) werde mit S bezeichnet.

2. Wir denken uns den Körper k als einen *Galois*schen. Durch Adjunktion seiner konjugierten erreichen wir dies immer. Sein Grad sei m, seine Substitutionen:

$$s_1 = 1,\ s_2, s_3, s_4, \dots s_m.$$

In diesem Körper hat (1.) eine zyklische Gruppe. Wir setzen fest, daß Θ eine den Körper (k, Θ) bestimmende Zahl sei. Die aus (1.) entspringenden m Gleichungen:

$$(1'.) \quad (s_i\Theta)^n - s_i\vartheta_1(s_i\Theta)^{n-1} + s_i\vartheta_2(s_i\Theta)^{n-2} - \dots - (-1)^n s_i\vartheta_n = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \dots m)$$

sind ebenfalls relativ *Abel*sch zu k. Dabei bedeute $s_i\Theta$ irgend eine bestimmte der m Wurzeln von (1'.). Wir bilden die m elementar-symmetrischen Funktionen der Größen:

$$s_1\Theta = \Theta,\ s_2\Theta,\ s_3\Theta, \dots s_m\Theta.$$

Alle diese elementarsymmetrischen Funktionen ergeben zusammen mit k einen Rationalitätsbereich, in dem der ursprüngliche Körper (Θ, k) enthalten ist.

Denn da Θ eine den Körper (Θ, k) bestimmende Zahl ist, genügt sie einer irreduzibeln Gleichung vom $m \cdot n$-ten Grade. Wenn aber die m elementarsymmetrischen Funktionen einen Körper von niedrigerem als n-ten Grade bestimmten, so würde ja Θ einer Gleichung von niedrigerem als $n \cdot m$-ten Grade genügen. Also ist der Körper der elementarsymmetrischen Funk-

tionen *wenigstens vom Grade n.* Da seine Zahlen ferner gegenüber allen Substitutionen von k ungeändert bleiben, ist er prim zu k. Er gibt somit zusammen mit k einen Körper von *wenigstens $n \cdot m$-tem Grade.* Hieraus ergibt sich sofort, daß dieser Körper mit dem Körper $(k, s_1\Theta, s_2\Theta, \ldots s_m\Theta)$ identisch ist, der den ursprünglichen enthält.

3. Es sei e_i eine der obigen elementar-symmetrischen Funktionen. *Dann genügt e_i einer irreduzibeln Gleichung mit rationalen Zahlen als Koeffizienten, die in k eine Abelsche ist. Die Abelsche Gruppe besteht aus höchstens m zyklischen Substitutionen, deren Grade Teiler von n sind.*

Die erste Behauptung geht aus der Konstruktion sofort hervor. Die Beschaffenheit der Gruppe erkennt man folgendermaßen:

Es sei S_i die Substitution der Gleichung (1'.). Man erhält dann durch:

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_m^{x_m} e_i \qquad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots n$$

ein System von Zahlen, deren symmetrische Funktionen sicher in k liegen. Also muß die Gruppe von e_1 in bezug auf k sicher ein Teiler von der Gruppe:

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_m^{x_m} \qquad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots n$$

sein. Diese Gruppe ist aber *Abel*sch, somit jeder ihrer Teiler auch, wodurch die Behauptung erwiesen ist. Der Grad der Substitutionen S_i ist aber n; also ist auch die letzte Behauptung erwiesen.

4. Wir haben in den vorigen Abschnitten die Lösung der Gleichung (1.) auf die Lösung einer Reihe von Gleichungen

$$(2.) \qquad \Omega_n - \omega_1 \Omega^{n-1} + \cdots - (-1)^n \omega_n = 0$$

zurückgeführt, die sich folgender Eigenschaften erfreuen:

a) die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sind rationale Zahlen;

b) der Grad n ist eine Primzahlpotenz;

c) die Gleichung ist relativ *Abel*sch in bezug auf k, und hat höchstens m von einander unabhängige Substitutionen.

Die Substitutionen dieser *Abel*schen Gruppe seien:

$$S_1, S_2, \ldots S_\varkappa \; (\varkappa \leqq m).$$

Der Körper (Ω, k) ist ein *Galois*scher. Seine sämtlichen Substitutionen sind gegeben durch

$$s_i^y S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_\varkappa^{x_\varkappa} \quad \begin{cases} y = 0, 1, \\ i = 1, 2, \ldots m, \\ \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\varkappa \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots n. \end{cases}$$

Somit ist stets:

$$s_i S = S' s_i,$$

wo S, S' irgendwelche Potenzprodukte $S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_\varkappa^{x_\varkappa}$ sind. Aus dieser Gleichung folgt sofort:

$$s_i S_\xi^y = S'^y s_i.$$

Die Substitutionen S und S' müssen aber den gleichen Grad haben. Hieraus folgt, daß wir durch Bildung der symmetrischen Funktionen von Ω mit allen relativ konjugierten, deren Substitutionen gleich hohen Grad haben, schließlich zu Gleichungen gelangen, mit den Eigenschaften a) b) c) und überdies der Eigenschaft d), daß ihre sämtlichen Grundsubstitutionen den gleichen Grad haben.

5. Wenn $\varkappa$, die Anzahl der unabhängigen Substitutionen $S_1, S_2, \ldots$, größer oder gleich ist dem größten Exponenten einer der Substitutionen s_i, so läßt sich das Problem noch weiter vereinfachen. Man kann nämlich setzen, wenn s irgend eine der Substitutionen $s_1 s_2, \ldots s_m$ ist vom Grade u,

$$\begin{aligned} s S_1 &= S_2 s, \\ s S_2 &= S_3 s, \\ &\ldots\ldots \\ s S_u &= S_{u+1} s. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort:

$$s^u S_1 = S_{u+1} s^u$$

oder wegen $s^u = 1$,

$$S_1 = S_{u+1}.$$

Wir wollen aber diesen allgemeinen Fall nicht weiter verfolgen, sondern den Fall der komplexen Multiplikation noch näher ins Auge fassen.

In diesem Falle ist $m = 2$, und nur eine Substitution s vorhanden:

$$s^2 = 1.$$

Nach (3.) hat man höchstens 2 unabhängige Substitutionen S_1 und S_2 vom Grade n. *Man kann jedoch in diesem Falle immer die Gleichung* (2.) *auf 2 Gleichungen mit zyklischen Gruppen in k zurückführen.*

Ist nämlich

$$s S_1 = S_1^{x_1} s,$$

wo x_1 irgend eine ganze rationale Zahl ist, so wird der Körper der elementarsymmetrischen Funktionen von

$$\Omega, \; S_1 \Omega_1 \; S_1^2 \Omega, \ldots S_1^{u-1} \Omega$$

zyklisch in k sein, und da die symmetrischen Funktionen in bezug auf s invariant sind, wird der Körper auch wieder durch eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten gegeben sein.

Ist dagegen

$$s S_1 = S s$$

und S keine Potenz von S_1, so sei

a) *n prim zu* 2. Es wird, wegen $s^2 = 1$, die Beziehung existieren

$$s S = S_1 s;$$

ferner ist S sicher vom Grade n. Wenn

$$S = S_1^{x_1} S_2^{x_2},$$

so dürfen deshalb nicht beide x_1 und x_2 einen Teiler mit n gemein haben. Wir betrachten die beiden Substitutionen

$$S' = S_1 S \qquad \text{und} \qquad S'' = S_1 S^{-1}$$

oder

$$S' = S_1^{1+x_1} S_2^{x_2}; \qquad S'' = S_1^{1-x_1} S_2^{-x_2}.$$

Ist x_2 zu n teilerfremd, so bilden S' und S'' wieder eine Basis der durch S_1 und S_2 gegebenen Gruppe. Denn es ist.

$$S_1 = (S' S'')^a,$$
$$S_2 = (S' S''^{-1})^{a'} S^{-2a' x_1} = S'^{a' - 2aa' x_1} S''^{-a' - 2a' a x_1},$$

wenn a und a' den in diesem Falle stets lösbaren Kongruenzen genügen:

$$2a \equiv 1\,(n); \qquad 2x_2 a' \equiv 1\,(n).$$

Ist dagegen x_2 zu n nicht teilerfremd, so muß x_1 diese letztere Eigenschaft besitzen, und es wird ebenso (da n ungerade ist) auch (x_1+1) oder x_1-1 zu n teilerfremd sein. Je nachdem bilden S' und S_2 bezw. S'' und S_2 eine neue Basis.

Stets aber wird nun die neue Basis anders beschaffen sein als die alte, da

$$sS' = S's; \qquad sS'' = S''^{-1}s.$$

Wir haben das Problem also auf den zuerst betrachteten Fall zurückgeführt, daß S eine Potenz von S_1 sei.

b) *n eine Potenz von 2.* x_1 oder x_2 sind ungerade, wenn

$$S = S_1^{x_1} S_2^{x_2}.$$

Ist x_2 ungerade, so darf man S direkt als S_2 annehmen und hat

$$sS_1 = S_2 s,$$
$$sS_2 = S_1 s.$$

Wir haben den merkwürdigen Fall, daß die Substitution sS_1 eine Substitution $2n$-ten Grades ist. Denn es ist

$$(sS_1)^2 = sS_1 sS_1 = S_2 s^2 S_1 = S_1 S_2$$

und $S_1 S_2$ ist nach Annahme vom Grade n. Wir nehmen eine den Körper K bestimmende Zahl Ω und bilden die elementar-symmetrischen Funktionen von

$$\Omega,\ S_1S_2\Omega,\ (S_1S_2)^2\Omega, \ldots (S_1S_2)^{n-1}\Omega$$

und von diesen bilden wir wieder die symmetrischen Funktionen mittels der Substitution s. Diese bleiben dann in bezug auf s und S_1S_2 ungeändert (da $sS_1S_2 = S_1S_2s$). Dagegen ändern sie sich für S_1 (bezw. S_2, was auf dasselbe hinauskommt, da für diese Zahlen $S_1S_2 = 1$, also $S_1 = S_2^{-1}$ wird). Sie bestimmen einen Körper n-ten Grades mit den gewünschten Eigenschaften.

Nachher machen wir die gleiche Operation mit

$$\Omega,\ S_1S_2^{-1}\Omega,\ (S_1S_2^{-1})^2\Omega, \ldots (S_1S_2^{-1})^{n-1}\Omega.$$

Diese Werte genügen dann einer Gleichung vom n-ten Grade, deren Substitution $S_1 (= S_2)$ ist. Allein die beiden so konstruierten Körper n-ten

Grades haben den gleichen Unterkörper 2. Grades. Denn es ist für die Zahlen derselben

$$S_1^2 = S_2^2 = 1,$$

also

$$S_1 S_2 = S_1 S_2^{-1}.$$

Dagegen können die beiden Körper nicht mehr Körper gemein haben, da ja für den zuerst konstruierten Körper (wegen $S_1 = S_2^{-1}$):

$$s S_1 = S_1^{-1} s,$$

für den zweiten dagegen (wegen $S_1 = S_2$)

$$s S_1 = S_1 s,$$

welche Gleichungen nur übereinstimmen für die Zahlen des Körpers $S_1^2 = 1$. Um den noch fehlenden quadratischen Körper zu erlangen, bilden wir den zu k relativ biquadratischen Körper, mit den Substitutionen:

$$1, \; S_1, \; S_2, \; S_1 S_2.$$

Derselbe hat nur einen quadratischen Unterkörper mit den obigen Körpern gemein. Er gibt also mit ihnen zusammen den gewünschten Körper.

Dieser biquadratische Körper ist aber relativ zyklisch in bezug auf k. Denn er ist gegeben durch:

$$1, \; S = s S_1, \; S^2 = (S_1)^2 = S_1 S_2, \; S^3 = (s S_1)^3 = s S_2,$$

und es wird

$$s S = S_1 = S_1 s \cdot s = s S_2 \cdot s = S^3 \cdot s,$$

also haben wir durch lauter zyklische Relativgleichungen den genannten Körper erhalten.

Ist dagegen x_2 gerade, so ist x_1 ungerade, und $x_1 + 1$ oder $x_1 - 1$ nur durch 2 teilbar, nicht aber durch 4. Je nachdem nehme man $S_1 S$ oder $S_1 S^{-1}$ und bilde mit der betreffenden Substitution die relativkonjugierten von Ω. Ihre elementar-symmetrischen Funktionen genügen dann einer zyklischen Gleichung $2n$-ten Grades mit der Substitution

$$S = s S_2$$

in bezug auf k (denn es ist jetzt $S_1^2 = S_2^{2x}$, x eine bestimmte ganze rat. Zahl).

Wir haben somit in allen Fällen den **Satz:** *Jede algebraische Gleichung, die in einem quadratischen Körper als Rationalitätsbereich eine Abelsche Gruppe*

besitzt, läßt sich auflösen durch eine Reihe von Gleichungen mit folgenden Eigenschaften:

a) *die Koeffizienten der Gleichung sind rationale Zahlen;*

b) *der Grad n ist eine Primzahlpotenz;*

c) *die Gruppe ist zyklisch in k.*

Um deshalb unnötige Komplikation der Bezeichnung zu vermeiden, werden im folgenden auch für den Fall des allgemeinen Körpers k Gleichungen vom Typus des letzten Satzes behandelt werden. Wir setzen die Gruppe der Gleichungen also als zyklisch voraus. Es haben jedoch die zu entwickelnden Methoden ihre ganz gleiche Anwendung im allgemeinen Fall, der deshalb nicht im geringsten mehr Interesse erfordert als der, der allein genau entwickelt werden soll.

Kapitel II. *Der Zahlstrahl.*

Hauptsatz: Im Kongruenzstrahl ist die Anzahl der Strahlgrundeinheiten gleich der Anzahl der Grundeinheiten des Körpers. Die Strahlklassenanzahl h_s beträgt:

$$h_s = \varphi(\mathfrak{f}) \frac{w_s R}{w \cdot R_s} h,$$

wo $\mathfrak{f}$ der Führer des Strahles, h die Klassenanzahl des Körpers, R der Regulator des Körpers, R_s der des Strahles und w die Anzahl der Einheitswurzeln im Körper, w_s der im Strahl ist.

Definition: Ein System von Zahlen heißt ein Strahl, wenn das Produkt und der Quotient zweier Zahlen desselben wieder dem System angehört. Derselbe enthält somit stets die Einheit.*)

Der *Körper und der reguläre Ring***) sind Spezialfälle von Strahlen.

1. Wir betrachten speziell den Zahlstrahl, der aus den Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers zusammengesetzt ist. Eine Einheit des Körpers, die im Strahl liegt, heißt *Strahleinheit.* Alle Strahleinheiten lassen sich durch r *Strahlgrundeinheiten* darstellen:

$$\varepsilon H_1^{x_1} H_2^{x_2} \ldots . H_r^{x_r},$$

---

*) Der Begriff Strahl ist zuerst (aber etwas abweichend) in meiner Dissertation (Göttingen, 1903) Anm. 4 S. 5 eingeführt. Seither wurde er auch gebraucht von *Lietzmann*, Zur Theorie der n-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. Math. Annal. Bd. 60, S. 263.

**) Die Zahlen eines Ringes, die zum Führer prim sind, sowie deren Quotienten.

wo $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend welche ganze rationale Zahlen und ε eine der Einheitswurzeln des Strahles sind.

Diesen Satz beweist man sofort mit Hilfe der im Körper existierenden Grundeinheiten.*)

2. Alle Zahlen eines Körperideals, die im Strahl liegen, bilden ein System $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ des Strahles von der Art, daß jedes Produkt zweier Zahlen des Systems, multipliziert mit einer beliebigen ganzen Zahl des Strahls, wieder dem System angehört. Dies System heißt *Strahlideal* γ_s:

$$\gamma_s = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Ein Strahlideal, das alle und nur diejenigen Zahlen $\lambda \cdot \alpha$ enthält, wo λ jede und α eine bestimmte ganze Zahl des Strahles bedeutet, heißt *Hauptstrahlideal* (α).

Das Produkt zweier Strahlideale ist das Strahlideal, gebildet aus allen Produkten einer Zahl des einen und einer Zahl des andern Strahlideals. Zu jedem Strahlideal $\mathfrak{a}$ gibt es ein Strahlideal $\mathfrak{b}$, so daß das Produkt ein Hauptstrahlideal wird:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\omega),$$

wo ω eine Zahl des Strahles ist. Denn fassen wir $\mathfrak{a}$ einen Augenblick als Körperideal auf, so gibt es ein Körperideal $\mathfrak{b}$, so daß

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\omega)$$

wird. Nun kann man aber ω immer als Zahl des Strahles auffassen. Wir wählen hierzu einfach eine der Strahlzahlen aus $\mathfrak{a}$. Nehmen wir nun in $\mathfrak{b}$ nur diejenigen Zahlen, die zugleich im Strahl liegen, so ergibt dies System das gewünschte Strahlideal. Aus diesem Resultat kann man leicht interessante Schlüsse ziehen, gemäß der einfachen Theorie der Ideale.**)

3. Zwei Strahlideale heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine Zahl des Strahles ist; man schreibt:

$$\frac{\mathfrak{a}_s}{\mathfrak{b}_s} \cong 1,$$

wobei das Kongruenzzeichen angenehm ist, um die Strahlenäquivalenz

*) Zahlbericht S. 214, Satz 47.
**) Zahlbericht § 5, S. 184 u. ff.

hervorzuheben. Das Kongruenzzeichen wurde gewählt, weil das wichtigste Beispiel von Strahlen die Kongruenzklasse nach einem Ideal ist (s. unten).

Alle äquivalenten Strahlideale bilden eine *Strahlklasse*, die Anzahl der Strahlklassen die *Strahlklassenanzahl.*

4. Von besonderem Interesse ist der *Kongruenzstrahl*, d. h. der Strahl, dessen Zahlen alle einer Zahl nach einem Modul kongruent sind. Diese Zahl muß immer die Einheit sein, da ja der Quotient zweier Zahlen ebenfalls im Strahl liegen soll. Es sei f der Modul. Derselbe wird *der Führer des Strahles* genannt. Alle Zahlen Ω des Strahles erfüllen also die Bedingung:

$$\Omega \equiv 1 \quad (f);$$

f ist hier ein Körperideal.

In diesem Strahl ist *die Anzahl der Grundeinheiten gleich der Anzahl der Grundeinheiten des Körpers. Ist h die Klassenanzahl des Körpers, so ist*

$$\varphi(f) \cdot \frac{w_s \cdot R}{w \cdot R_s} \cdot h$$

*die Klassenanzahl des Strahles; dabei ist R der Regulator des Körpers, R_s der des Strahles, w die Anzahl der Einheitswurzeln des Körpers, w_s der des Strahles, $\varphi(f)$ die bekannte φ-Funktion.**)

Um das letztere einzusehen, machen wir folgende Schlüsse:

a) Zu jeder Zahl ω des Körpers kann man eine zu ω prime Zahl ω_1 finden, so daß $\omega \cdot \omega_1$ im Strahl liegt, falls nur ω zum Führer des Strahles prim ist.

b) Jedem Körperideal entspricht ein Strahlideal und umgekehrt. Denn jedes Ideal läßt sich durch 2 Zahlen geben.**) Gemäß a) mache man dieselben zu Strahlzahlen, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Die Klassenanzahl des Strahles ist also ein Vielfaches von h. Dieses Vielfache findet man, indem man die Anzahl der Strahlklassen untersucht, die durch die Körperzahlen gegeben sind.

Die Strahlklassenanzahl ist endlich.

---

*) Zahlbericht S. 192.

**) Zahlbericht Satz 12, S. 186.

Kap. III. *Die Primzahlen der Relativdiskriminante.*

Hauptsatz: Das Primideal $\mathfrak{p}$ von k werde im relativ-zyklischen Körper K die n_2-te Potenz eines Ideals. Es sei z die Substitution des Trägheitskörpers von $\mathfrak{p}$ in bezug auf seinen Zerlegungskörper. Ist dann S die Substitution des relativ-zyklischen Körpers K in bezug auf k, und

$$z \cdot S = S^x \cdot z$$

(x eine ganze rationale Zahl), so muß

$$\left.\begin{array}{ll} 1 + p^a + p^{2a} + \cdots + p^{\left(\frac{f}{a}-1\right)a} \equiv 0 & (n'') \\ p-1 \qquad\qquad 0 & (n') \end{array}\right\} n' \cdot n'' = n_2$$

sein, wo n' der größte gemeinsame Teiler von $x-1$ und n_2 ist, a ein solcher Teiler von f, daß $x^a - 1$ zu l prim wird ($n = l^r$) oder $a = 1$ ist.

Komplexe Multiplikation: Wenn die Substitution des quadratischen Körpers mit s, die seines relativ-zyklischen Körpers K mit S bezeichnet wird und

$$sS = S^{-1}s, \text{*)}$$

so ist

$$p - \left(\frac{d}{p}\right) \equiv 0 \quad (n_2),$$

wenn p die n_2-te Potenz eines Ideals in K wird, d die Diskriminante des quadratischen Körpers und $\left(\frac{d}{p}\right)$ das *Legendre*sche Symbol bedeutet.

Gegeben eine Gleichung:

$$(1.) \qquad \Theta^n - \vartheta_1 \Theta^{n-1} + \vartheta_2 \Theta^{n-2} - \cdots - (-1)^n \vartheta_n = 0.$$

Der Grad n sei eine Primzahlpotenz

$$n = l^r \qquad (r > 0)$$

(l eine Primzahl).

Die Gleichung habe im Rationalitätsbereich eines gewissen Körpers k eine zyklische Gruppe. Den letzteren denken wir uns wieder als einen *Galois*schen vom Grade m mit den Substitutionen:

$$s_1 = 1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots s_m.$$

*) Vergl. S. 213 dieser Arbeit.

S sei die Substitution von (1.) in k. Dann nehmen wir weiter an, die Koeffizienten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ seien rationale Zahlen.

Wir bezeichnen den Körper (k, Θ) mit K und seine Zahlen mit großen griechischen Buchstaben; die Zahlen von k mit kleinen griechischen Buchstaben; die Ideale von K mit großen deutschen, diejenigen von k mit kleinen deutschen Buchstaben.

Nach Annahme ist

$$S^n = 1, \quad S^x \neq 1, \quad \text{falls} \quad x \not\equiv 0 \quad (n).$$

1. Wie sofort ersichtlich, ist K wieder ein *Galois*scher Körper. Seine sämtlichen Substitutionen sind gegeben durch

$$S^x = S^x s_1, \; S^x s_2, \ldots S^x s_m,$$

wenn man x alle Werte von 0 bis $n-1$ durchlaufen läßt. Wir wollen unter s eine der Substitutionen $s_1, s_2, \ldots s_m$ verstehen und Größen im Zusammenhang mit s ohne Index bezeichnen. Wenn dann s mit einem s_i identifiziert wird, so hat man nur auch jenen Größen den Index i zu geben. sS muß sich so ausdrücken:

$$sS = S^x s_y.$$

Zunächst sieht man, wenn man die Gleichung auf irgend eine Zahl α von k anwendet, daß

$$s = s_y,$$

also

$$s\,S = S^x s, \qquad S = s^{-1} S^x s.$$

Nun ist aber

$$(s^{-1} S^x s)^y = s^{-1} S^{x \cdot y} s,$$

also wird

$$S = s^{-1}(s^{-1} S^x s)^x s = s^{-2} S^{x^2} s^2 = \cdots = s^{-u} S^{x^u} s^u.$$

Es sei u die niedrigste Zahl, für die

$$s^u = 1$$

wird. Dann ergibt letztere Beziehung

$$S^{x^u} = S$$

oder

$$x^u \equiv 1 \quad (n). \tag{3.}$$

Ist daher u zu $\varphi(n) = l^{r-1}(l-1)$ prim, so muß stets $x \equiv 1 (n)$ und somit

$$sS = Ss$$

sein.

Die Kongruenz (3.) ergibt auch noch die Umkehrung:

$$Ss = sS^{x^{u-1}}. \tag{4.}$$

Wir setzen nun

$$x = 1 + l^a v,$$

wo v zu l prim sei. Es folgt dann sofort aus (3.), falls $a > 0$,

$$u \equiv 0 \quad (l),$$

und für den Unterkörper von K, der relativ-zyklisch zu k vom Relativgrade l^a ist, findet man die Relation erfüllt:

$$sS = Ss.$$

Man sieht somit, daß dieser Körper in bezug auf die Substitution s ein *Abel*scher ist.

In dem Falle der komplexen Multiplikation weiß man, daß durch Adjunktion irgendwelcher *Abel*scher Größen, d. h. Einheitswurzeln, keine weitere Zerfällung eintritt, als man schon durch Adjunktion von Quadratwurzeln erhält.*) Ferner ist dort nur eine Substitution s vorhanden und

$$s^2 = 1 \quad \text{also} \quad u = 2.$$

Für x ergeben sich die Wurzeln: bei ungeradem l und $l^r = 2, 4$

$$x \equiv \pm 1 \quad (n).$$

Da der Fall $x \equiv 1 (n)$ auf Kreiskörper führt, was dem Obigen widerspricht, so muß

$$x \equiv -1 \quad (n)$$

und

$$sS = S^{-1}s \tag{2'.}$$

sein. $(x-1)$ ist dann stets zu l prim und $a = 0$. Bei $l = 2$, $r > 2$

$$x \equiv \pm 1, \quad \pm 1 \pm \frac{n}{2}.$$

*) *Weber:* Über Zahlgruppen in algebraischen Körpern. Mathemat. Annalen. Bd. 49, S. 39.

Die Fälle $x \equiv 1,\ 1+\frac{n}{2}$ sind wieder auszuschließen, da sie auf Kreiskörper führen. Also bleibt auch hier nur

$$x \equiv -1, \quad -1+\frac{n}{2}.$$

In beiden Fällen ist $(x-1)$ durch 2 und durch keine höhere Potenz von 2 teilbar.

2. *Die Relativdifferente $\mathfrak{D}_K$ von K in bezug auf k.*

Man findet für $\mathfrak{D}_K$ leicht den Ausdruck:*)

$$\mathfrak{D}_K = \{(\Omega_1 - S\Omega_1, \Omega_2 - S\Omega_2, \ldots)^{l^{r-1}}$$
$$(\Omega_1 - S^l\Omega_1, \Omega_2 - S^l\Omega_2, \ldots)^{l^{r-2}} \ldots (\Omega_1 - S^{l^{r-1}}\Omega_1, \Omega_2 - S^{l^{r-1}}\Omega_2, \ldots)\}^{l-1},$$

wo $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ alle ganzen Zahlen von K sind. Denn jedes Element**) $\mathfrak{E}_i$ ist gleich dem Element $\mathfrak{E}_k$, wenn i und k durch die gleiche Potenz von l teilbar sind.

Es sei p *eine von l verschiedene* Primzahl, $\mathfrak{p}$ ein in p aufgehendes Primideal von k, $\mathfrak{P}_1$ ein in $\mathfrak{p}$ enthaltenes Primideal von K.

Wenn $\mathfrak{P}_1$ in der Relativdifferente enthalten ist, so muß es ein r_1 geben, so daß für eine bestimmte Zahl Ω^* die Inkongruenz besteht:

$$\Omega^* \not\equiv S^{l^{r_1-1}}\Omega^* \quad (\mathfrak{P}_1),$$

daß aber für alle Zahlen Ω von K die Kongruenz besteht:

$$\Omega \equiv S^{l^{r_1}}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1), \tag{6.}$$

(wenn $r_1 = r$ ist, so findet selbstverständlich keine Inkongruenz statt). Wir setzen $n_1 = l^{r_1}$, $n_2 = l^{r-r_1} = l^{r_2}$, so daß

$$n_1 n_2 = n; \qquad r_1 + r_2 = r. \tag{7.}$$

Damit also $\mathfrak{P}_1$ wirklich in der Relativdifferente aufgeht, muß die Ungleichheit bestehen:

$$0 \leqq r_1 < r. \tag{8.}$$

Da (6.) für alle ganzen Zahlen Ω gilt, so gilt sie auch für $S^{n-1}\Omega$:

$$S^{n-1}\Omega \equiv S^{n_1+n-1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1),$$

*) Zahlbericht, S. 205.

**) Zahlbericht S. 205, vergl. auch Satz 68, S. 249.

woraus sofort

$$\Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (S\mathfrak{P}_1)$$

folgt, d. h. aber: *Wenn $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{D}_K$ aufgeht, so gehen auch alle seine relativkonjugierten Ideale in $\mathfrak{D}_K$ auf.* Wir setzen $\mathfrak{P}_1^*$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\mathfrak{P}_1, S\mathfrak{P}_1, S^2\mathfrak{P}_1, \ldots$, sodaß also $\mathfrak{P}_1^*$ durch kein Quadrat eines Primideals teilbar ist und

$$(9.)\qquad \begin{cases} S\mathfrak{P}_1^* = \mathfrak{P}_1^*, \\ \Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*) \end{cases}$$

für alle ganzen Zahlen Ω von K.

Ist ferner y irgend eine ganze rationale Zahl, so ergibt des weiteren die Kongruenz (9.):

$$\Omega \equiv S^{yn_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*).$$

Da dieselbe für alle ganzen Zahlen Ω gilt, so gilt sie auch, wenn man für Ω die ganze Zahl $s^{u-1}\Omega$ setzt oder (bei Berücksichtigung von (2.) und (4.):

$$s^{u-1}\Omega \equiv S^{yn_1}s^{u-1}\Omega \equiv s^{u-1}S^{xyn_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*).$$

Bestimmen wir, was immer möglich ist, y so, daß

$$xy \equiv 1 \quad (n)$$

wird, so folgt

$$s^{u-1}\Omega \equiv s^{u-1}S^{n_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*)$$

oder:

$$\Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (s\mathfrak{P}_1^*),$$

gültig für jede ganze Zahl Ω von K.

Es ist somit auch $s\mathfrak{P}_1^*$ in der Relativdiskriminante enthalten, und wir setzen nun $\mathfrak{P}$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $s_1\mathfrak{P}_1^*$, $s_2\mathfrak{P}_1^*, \ldots s_m\mathfrak{P}_1^*$. Es gelten dann für $\mathfrak{P}$ die Beziehungen:

$$(10.)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv S^{n_1}\Omega \ (\mathfrak{P}) \text{ für jede ganze Zahl } \Omega \text{ von } K, \\ S\mathfrak{P} = \mathfrak{P}, \\ s\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \text{ für jede Substitution } s. \end{cases}$$

3. *Das in $\mathfrak{D}_k$ enthaltene Ideal $\mathfrak{P}$.*

Man kann sich den Relativkörper K aufgebaut denken aus r Relativkörpern $K_1, K_2, \ldots K_r \equiv K$, wo immer K_i relativ-zyklisch vom Relativgrade l

in bezug auf K_{i-1} ist. Es sei $\mathfrak{D}_i$ die Relativdifferente von K_i in bezug auf K_{i-1}. Dann folgt aus einem Satze*) sofort, wenn $\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots$ alle Zahlen des Körpers K_i bedeuten:

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_i = (\omega_1^{(i)} - S^{l^{i-1}}_{\omega_1^{(i)}},\ \omega_2^{(i)} - S^{l^{i-1}}_{\omega_2^{(i)}}, \ldots)^{l-1} \\ \qquad = (\Omega_1 - S^{l^{i-1}}\Omega_1, \Omega_2 - S^{l^{i-1}}\Omega_2, \ldots)^{l^{r-i}(l-1)}. \end{cases}$$

Vergleicht man (11.) mit dem in 2. gegebenen Ausdruck für $\mathfrak{D}_K$ und den dortigen Festsetzungen, so erhellt, daß

$$\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots \mathfrak{D}_{r_1}$$

zu $\mathfrak{P}$ prim sind,

$$\mathfrak{D}_{r_1+1}, \mathfrak{D}_{r_1+2}, \ldots \mathfrak{D}_r$$

einzeln durch $\mathfrak{P}$ teilbar sind.

Es ergibt sich für die Zerfällung jedes in p enthaltenen Primideals $\mathfrak{p}$ von k folgende Regel:

Durch Adjunktion von K_i zu K_{i-1} zerfällt jedes in p enthaltene Primideal von K_{i-1} nicht weiter oder in l von einander verschiedene Primideale, falls

$$i \leqq r_1.$$

Für $i > r_1$ wird dagegen *jedes* (vergl. Abschnitt 2.) solche Primideal die l-te Potenz eines Primideals von K_i.**)

Die n_2-te $= l^{r-r_1} = l^{r_2}$-te Potenz eines jeden in p enthaltenen Primideals von K wird somit Primideal in K_{r_1}. Hier tritt die wichtige Scheidung auf; p ist jetzt prim zur Relativdifferente von K_{r_1} in bezug auf k; in $\mathfrak{p}$ gehen also nur von einander verschiedene Primideale von K_{r_1} auf.

Aus dieser Überlegung folgt

$$(12.)\qquad \mathfrak{P}^{n_2} = \mathfrak{P}^{l^{r-r_1}} = \mathfrak{P}^{\frac{n}{n_1}} = (p).$$

4. Es sei $\mathfrak{P}'$ irgend ein Teiler von $\mathfrak{P}$, der invariant in bezug auf die Substitution S ist ($\mathfrak{P}' = S\mathfrak{P}'$). Aus dem Abschnitt 3. folgt, daß $\mathfrak{P}'$ die gleiche absolute Norm hat im Körper K, wie das Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}'^{n_2}$ des Körpers K_{r_1} in diesem Körper. Somit ist jede Zahl von K einer Zahl des Körpers K_r nach $\mathfrak{P}$ kongruent.

---

*) *Zahlbericht:* S. 40, Satz 208.

**) *Zahlbericht:* S. 277, Satz 93.

Wenden wir dieses Resultat auf eine ganze Zahl Ω von folgender Eigenschaft an: $\mathfrak{P}'$ gehe in Ω zur m-ten Potenz auf. Dagegen sei das Ideal $\left(\frac{\Omega}{\mathfrak{P}'^m}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ relativ prim.

Wir werden im folgenden ausgiebigen Gebrauch von der *Kronecker*-schen symbolischen Potenz*) machen. Die Größe Ω^{1-S} ist der Voraussetzung wegen einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{P}'$ kongruent; es darf mit ihr wie mit ganzen Zahlen in Kongruenzen mit dem Modul $\mathfrak{P}'$ gerechnet werden. Denn das Ideal $\mathfrak{P}'$ ist invariant in bezug auf S. Also enthalten Zähler und Nenner von $\frac{\Omega}{S\Omega}$ die gleiche Potenz von $\mathfrak{P}'$. Da aber nach Annahme die übrigen Ideale des Zählers und Nenners zu $\mathfrak{P}'$ prim sind, so sieht man, daß man Ω^{1-S} so mit einer zu p primen ganzen Zahl multiplizieren kann, daß es eine ganze, zu $\mathfrak{P}'$ prime Zahl wird, woraus leicht die obige Behauptung folgt.

Nach obigem ist Ω^{1-S} einer Zahl $\omega^{(r_1)}$ von K_{r_1} nach $\mathfrak{P}'$ kongruent:

$$\Omega^{1-S} \equiv \omega^{(r_1)} \quad (\mathfrak{P}').$$

Da $\omega^{(r_1)}$ in K_{r_1} liegt, ist

$$\omega^{(r_1)} = S^{n_1}\,\omega^{(r_1)}$$

und

$$\omega^{(r_1)\,(1+S+\cdots+S^{n_1-1})}$$

ist eine Zahl in k. Somit wird

$$\Omega^{1-S^{n_1}} = \Omega^{1-S}\cdot\Omega^{S-S^2}\cdots\Omega^{S^{n_1-1}-S^{n_1}} \equiv \omega^{(r_1)\,(1+S+\cdots+S^{n_1-1})} \equiv \omega \;(\mathfrak{P}'),$$
$$\omega \text{ eine Zahl in } k,$$

d. h. *die* $(1-S^{n_1})$*-te symbolische Potenz einer Zahl* Ω *mit der oben festgesetzten Eigenschaft ist einer Zahl* ω *von* k *nach* $\mathfrak{P}'$ *kongruent.*

5. *Die Zahl* $\Pi^{1-S^{n_1}}$.

Es sei Π eine ganze Zahl von K, in der unser $\mathfrak{P}'$ von Abschnitt 4 enthalten ist, jedoch so, daß $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ prim sei. Π fällt also unter die Rubrik der Ω von 4. Es sei ferner K_i einer der Körper $K_{r_1}, K_{r_1+1}, \ldots K_{r-1}$, also

$$(13.) \qquad r_1 \leqq i < r.$$

Wir setzen $m_1 = l^i$; $m_1 \cdot m_2 = n$.

*) Zahlbericht S. 271 u. ff.

Dann genügt Π in bezug auf K_i einer Relativgleichung m_2-ten Grades:

$$(14.)\qquad \Pi^{m_2}-\pi_1^{(i)}\Pi^{m_2-1}+\pi_2^{(i)}\Pi^{m_2-2}-\cdots-(-1)^{m_2}\pi_{m_2}^{(i)}=0,$$

wo $\pi_1^{(i)}, \pi_2^{(i)}, \ldots \pi_m^{(i)}$ Zahlen von K_i sind und dementsprechend den Bedingungen unterliegen

$$\pi_1^{(i)}=S^{m_1}\pi_1^{(i)};\quad \pi_2^{(i)}=S^{m_1}\pi_2^{(i)};\cdots \pi_{m_2}^{(i)}=S^{m_1}\pi_{m_2}^{(i)}.$$

Wegen der Bedingung (13.) kommt $\mathfrak{P}'$ in jeder der Relativdifferenten $\mathfrak{D}_i$ von K_i bis $K_r=K$ vor. Somit ist

$$\Pi\equiv S^{m_1}\Pi\quad(\mathfrak{P}').$$

Nun sind aber die $\pi^{(i)}$ die elementar-symmetrischen Funktionen der Größen Π, $S^{m_1}\Pi$, $S^{2m_1}\Pi, \cdots S^{(m_2-1)m_1}\Pi$; somit wird

$$\pi_k^{(i)}\equiv w\,\Pi^k\equiv 0\quad(\mathfrak{P}')$$

(w eine ganze rationale Zahl).

Da aber $\pi_k^{(i)}$ eine Zahl in K_i ist, muß auch sein

$$(15.)\qquad \pi_k^{(i)}\equiv 0\quad(\mathfrak{P}'^{m_2}).$$

Da des weiteren die Größe $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ prim sein soll, muß $\pi_{m_2}^{(i)}$ durch $\mathfrak{P}^{m_2}$ teilbar sein; allein es muß

$$(16.)\qquad \frac{\pi_{m_2}^{(i)}}{\mathfrak{P}'^{m_2}}\ \text{zu}\ \mathfrak{P}'\ \text{prim sein.}$$

Wir wollen die Diskriminante Δ von (14.) untersuchen. Dieselbe stellt sich folgendermaßen dar:*)

$$\Delta=(-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}}\prod_0^{m_2-1}{}_v\,\{m_2(S^{vm_1}\Pi)^{m_2-1}$$
$$-(m_2-1)\pi_1^{(i)}(S^{vm_1}\Pi)^{m_2-2}+\cdots+(-1)^{m_2-1}\pi_{m_2-1}^{(i)}\}.$$

Wegen (15.) finden wir, da $\prod_0^{m_2-1}{}_v(S^{vm_1}\Pi)=\pi_{m_2}^{(i)}$:

$$\Delta\equiv(-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}}m_2^{m_2}\cdot\pi_{m_2}^{(i)m_2-1}(\mathfrak{P}'^{m_2(m_2-1)+1})$$

oder da links und rechts in der Kongruenz Größen von K_i stehen:

$$\Delta\equiv(-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}}m_2^{m_2}\pi_{m_2}^{(i)m_2-1}(\mathfrak{P}'^{m_2}).$$

*) *Weber:* Algebra Bd. I, S. 169, Gleich. (5).

Vergleichen wir diese Kongruenz mit dem Resultat (16.) und bedenken, daß p von l verschieden, also zu m_2 prim ist, so folgt

$$(17.) \qquad \Delta \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{P}'^{m_2^2}),$$

und diese Inkongruenz gilt auch für jedes in $\mathfrak{P}'$ *enthaltene Primideal.*

Wäre nun für irgend ein in $\mathfrak{P}'$ enthaltenes Primideal $\mathfrak{P}_1$ die Kongruenz erfüllt:

$$\Pi^{1-S^{m_1}} \equiv 1 \ (\mathfrak{P}_1) \quad \text{oder} \quad \Pi \equiv S^{m_1}\Pi \ (\mathfrak{P}_1^2),$$

so folgt aus der Definition der Diskriminante

$$\Delta = \prod_{0}^{m_2-1}{}_{v,w}(S^{vm_1}\Pi - S^{wm_1}\Pi)$$

sofort

$$\Delta \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_1^{2m_2(m_2-1)}).$$

Ein Vergleich mit (17.) ergibt die Ungleichheit:

$$2m_2(m_2-1) < m_2^2$$

oder

$$m_2 < 2, \quad m_2 = 1, \quad m_1 = n,$$

somit

$$i = r.$$

Diese Beziehung widerspricht der Annahme (12.). *Dieser Widerspruch beweist die Hinfälligkeit der Annahme, daß* Π^{1-S^m} *nach irgend einem in* $\mathfrak{P}'$ *enthaltenen* $\mathfrak{P}_1$ *kongruent* 1 *sein könne.*

Wir erhalten zwei Resultate:

a) *Die Zahl* $\Pi^{1-S^{m_1}}$ *ist nach keinem in* $\mathfrak{P}'$ *enthaltenen Primideal von* K *kongruent* 1:

$$\Pi^{1-S^{m_1}} \not\equiv 1 \ (\mathfrak{P}')$$

falls nur

$$n_1 \leqq m_1 < n$$

ferner:

b) *Die Relativdifferente* $\mathfrak{D}_k$ *ist durch* $\mathfrak{P}^{n_2-1}$ *teilbar und* $\left(\frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{P}^{n_2-1}}\right)$ *ist zu* $\mathfrak{P}$ *prim.*

Dies letztere ergibt sich in dem Falle $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$.

6. *Der Klassenstrahl.*

Es sei wieder $\mathfrak{P}'$ irgend ein Teiler von $\mathfrak{P}$, invariant in bezug auf S. Wir bilden den Kongruenzstrahl*) mit dem Führer $\mathfrak{P}'$. Alle seine Zahlen Ω erfüllen die Bedingung

$$\Omega \equiv 1 \ (\mathfrak{P}').$$

Es sei speziell $\mathfrak{P}'$ ein solcher Teiler von $\mathfrak{P}$, daß

$$\mathfrak{P}'^{n_2} = \mathfrak{p}$$

Primideal in k wird. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal f-ten Grades von k, so liegt die

$$\varphi(f) = (p^f - 1)\text{-te}$$

Potenz jeder zu p primen Zahl von K sicher im Strahl.**)

Es sei wieder Π eine durch $\mathfrak{P}'$ teilbare Zahl, $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ prim. Dann ist $\Pi^{1-S^{n_1}}$ einer Zahl α von k nach $\mathfrak{P}'$ kongruent:

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \ (\mathfrak{P}').$$

α^{n_2} ist die kleinste Potenz von α, die im Strahl mit dem Führer $\mathfrak{P}'$ liegt.

Denn da α in k liegt, wird

$$\Pi^{1-S^{G n_1}} \equiv \alpha^G \ (\mathfrak{P}').$$

Es sei g die kleinste Zahl, für die

$$\alpha^g \equiv 1 \ (\mathfrak{P}'),$$

also auch

$$\Pi^{1-S^{n_1 g}} \equiv 1 \ (\mathfrak{P}').$$

Wegen 5. a) muß dann sein

$$g \geqq n_2.$$

Andererseits ist aber $S^{n_1 n_2} = 1$, also von selbst

$$\alpha^{n_2} \equiv \Pi^{1-S^{n_1 n_2}} \equiv 1 \ (\mathfrak{P}').$$

Somit ist n_2 wirklich der kleinste Exponent, der α in den Strahl bringt, wie zu beweisen war.

---

*) Vergl. Kap. II dieser Arbeit.

**) Zahlbericht Satz 22, S. 191.

Nun ist aber nach obigem die (p^f-1)-te Potenz von α im Strahl. Somit muß

$$p^f-1\equiv 0 \ (n_2)$$

sein, woraus

Satz: *Wenn das in p enthaltene Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper K die n_2-te Potenz eines Ideals wird, so muß*

$$p^f-1\equiv 0 \ (n_2)$$

sein, wenn p^f die Norm von $\mathfrak{p}$ in k ist.

7. Es sei wieder $\mathfrak{P}'$ irgend ein Teiler von $\mathfrak{P}$, invariant in bezug auf S; Ω eine Zahl des Strahles, mit dem Führer $\mathfrak{P}'$, deren Relativnorm in bezug auf K_u gleich 1 ist. Es sei $l^u=m_1$, $m_1 m_2=n$; also:

$$\Omega\equiv 1 \ (\mathfrak{P}'),$$

$$\Omega^{1+S^{m_1}+S^{2m_1}+\cdots+S^{(m_2-1)m_1}}=1.$$

Man darf setzen

$$\Omega=A^{1-S^{m_1}}.$$

Es ist nämlich

$$A=1+\Omega+\Omega^{1+S^{m_1}}+\cdots+\Omega^{1+S^{m_1}+S^{2m_1}+\cdots+S^{(m_2-2)m_1}}.$$

Da Ω im Strahl liegt und $\mathfrak{P}'=S\mathfrak{P}'$ ist, muß sein

$$A\equiv m_2 \ (\mathfrak{P}');$$

da $p\neq l$, wird $A\neq 0$.

Wir bestimmen ferner eine ganze rationale Zahl a so, daß

$$a m_2\equiv 1 \ (p).$$

Dann ist auch

$$A^*=aA\equiv 1 \ (\mathfrak{P}')$$

und für die $(1-S^{m_1})$-te symbolische Potenz

$$A^{*1-S^{m_1}}=\Omega,$$

woraus

Satz: *Ist Ω eine Zahl des Strahls mit dem Führer $\mathfrak{P}'$, wo $\mathfrak{P}'=S\mathfrak{P}'$ ein Teiler von $\mathfrak{P}$ ist, so ist Ω die $(1-S^{m_1})$-te symbolische Potenz einer ganzen Zahl des Strahles, falls nur*

$$\Omega^{1+S^{m_1}+\cdots+S^{(m_2-1)m_1}}=1,$$

$$m_1 m_2=m.$$

Man kann nämlich A^* auch ganz machen. Denn A^* liegt im Strahl. Somit muß Zähler und Nenner von A^* ein in $\mathfrak{P}'$ enthaltenes Primideal in gleicher Potenz enthalten; man kann daher A^* so mit einer in K_{m_1} und dem Strahl liegenden Zahl multiplizieren, daß das Produkt ganz wird. Die $(1-S^{m_1})$-te symbolische Potenz dieses Produktes bleibt dagegen gleich dem gegebenen Ω.

Dieser Satz wird später die Bedeutung des Strahles besonders hervortreten lassen.

8. *Der Klassenring.*

Im Fall $f=1$ ist durch den Satz Abschnitt 6) p nach dem Modul n_2 vollständig bestimmt. Allein wenn $f>1$ ist, so ist p^f-1 eine reduzible rationale Funktion von p. In diesem Falle können wir noch viel genauer den Teiler von p^f-1 bestimmen, der durch n_2 teilbar sein muß. Dazu bedürfen wir eines andern Begriffes.

Statt, wie beim Strahl, nur diejenigen Zahlen zu betrachten, die nach einem Teiler $\mathfrak{P}'$ ($\mathfrak{P}'=S\mathfrak{P}'$) von $\mathfrak{P}$ der Einheit kongruent sind, betrachten wir *alle diejenigen Zahlen von K, die nach $\mathfrak{P}'$ einem bestimmten Rationalitätsbereich kongruent sind. Diese Zahlen werden einen Ring bilden, den Klassenring mit dem Führer $\mathfrak{P}'$ in betreff auf den bestimmten Rationalitätsbereich.* Der einfachste Klassenring ist derjenige, dessen Zahlen den ganzen rationalen Zahlen nach $\mathfrak{P}'$ kongruent sind.

Es sei wieder $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k und

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}'^{n_2}.$$

Ferner sei die *Zerlegungsgruppe**) gegeben durch die Substitutionen der Trägheitsgruppe und durch

$$1,\ z,\ z^2,\ z^3, \ldots z^{f-1}$$
$$(f \text{ der Grad von } \mathfrak{p}).$$

z^f ist dann wieder eine Substitution der Trägheitsgruppe. Es sei dagegen $z^{f'}=1$; dann ist

$$f'\equiv 0 \quad (f),$$
$$f\cdot r_t\equiv 0 \quad (f'),$$

*) Zahlbericht S. 251.

wo r_t der Grad der Trägheitsgruppe ist.*) Wenn $\mathfrak{p}$ prim ist zur Diskriminante von k, so ist $r_t = 1$ und $f' = f$.

Es sei a irgend ein Teiler von f und $a \cdot b = f$. Wir bilden den Unterkörper des Trägheitskörpers, der vom Relativgrade a ist in bezug auf den Zerlegungskörper, für dessen Zahlen α also

$$z^a \alpha = \alpha.$$

Wir bezeichnen diesen Körper mit k_a und bilden den Klassenring in bezug auf k_a. Ist $\varphi(\mathfrak{p})$ die φ-Funktion**) von $\mathfrak{p}$ in k, $\varphi_a(\mathfrak{p})$***) diejenige von k_a, *so ist die*

$$\frac{\varphi(\mathfrak{p})}{\varphi_a(\mathfrak{p})} = \frac{p^f - 1}{p^a - 1} = 1 + p^a + p^{2a} + \cdots + p^{(b-1)a}\text{-te}$$

Potenz jeder Zahl von k im Klassenring in bezug auf k_a.

9. Wir nehmen die Primitivzahl π des Primideals $\mathfrak{p}$ in k; sie habe die folgende Eigenschaft: sie sei kongruent 0 nach allen von $\mathfrak{p}$ verschiedenen, zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Idealen. Es ist dann z. B. †)

$$\pi^p \equiv z\pi \quad (\mathfrak{p}).$$

Hieraus folgt:

$$\pi^{1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{(b-1)a}} \equiv \pi \cdot (z^a \pi)(z^{2a}\pi)\cdots(z^{(b-1)a}\pi) \quad (\mathfrak{p}),$$

$$\pi^{p^u} \equiv z^u \pi \quad (\mathfrak{p}).$$

Da π Primitivzahl ist nach $\mathfrak{p}$, somit jede andere zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl von k einer Potenz von π nach $\mathfrak{p}$ kongruent ist, *muß auch für jede beliebige andere Zahl α von k die Kongruenz bestehen:*

$$\alpha^{1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{(b-1)a}} \equiv \alpha (z^a \alpha)(z^{2a}\alpha)\cdots(z^{(b-1)a}\alpha) \quad (\mathfrak{p}).$$

10. Wir betrachten die Relation

$$zS = S^x \cdot z,$$

speziell das x dieser Gleichung. Wir fanden,††) daß

$$x^{f'} \equiv 1 \quad (n)$$

---

*) Zahlbericht S. 251 u. ff.

**) Zahlbericht S. 192.

***) Zahlbericht S. 244.

†) Zahlbericht S. 252.

††) Vergl. S. 16 dieser Arbeit.

sein muß, wenn $z^{f'}=1$ ist. Es sei

$$\text{a)}\ x \not\equiv 1 \quad (l).$$

Wir bestimmen dann a als Teiler von f so, daß

$$x^a \not\equiv 1 \quad (l)$$

wird. Es ist dann

$$\frac{x^{f'}-1}{x^a-1} \equiv 0 \quad (n)$$

oder wenn $f'=b'f=b'\cdot b\cdot a$,

$$1+x^a+x^{2a}+\cdots+x^{(bb'-1)a} \equiv 0 \quad (n).$$

11. Nachdem a gemäß 10. ausgewählt ist, bilden wir den Klassenring in bezug auf k_a mit dem Führer $\mathfrak{P}'$, wo $\mathfrak{P}'^{n_2}=\mathfrak{p}$ Primideal in k sei. Es sei wieder Π durch $\mathfrak{P}'$ teilbar, aber $\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}$ zu $\mathfrak{P}'$ prim. Dann ist

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'), \qquad (\alpha \text{ eine Zahl von } k)$$

$$(z^a\Pi)^{1-S^{n_1}x^a} \equiv z^a\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$(z^{2a}\Pi)^{1-S^{n_1}x^{2a}} \equiv z^{2a}\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(z^{(bb'-1)a}\Pi)^{1-S^{n_1}x^{f'-a}} \equiv z^{(b-1)a}\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

woraus durch Multiplikation

$$\Omega'^{1-S^{n_1}} \equiv [\alpha\,(z^a\alpha)\,(z^{2a}\alpha)\cdots(z^{(b-1)a}\alpha)]^{b'} \quad (\mathfrak{P}'),$$

wo

$$\Omega' = \Pi\cdot(z^a\Pi)^{1+S^{n_1}+S^{2n_1}+\cdots+S^{(x^a-1)n_1}}$$
$$\times\,(z^{2a}\Pi)^{1+\cdots+S^{(x^{2a}-1)n_1}}\cdots(z^{(bb'-1)a}\Pi)^{1+S^{n_1}+\cdots+S^{(x^{(bb'-1)a}-1)n_1}};$$

$\mathfrak{P}'$ geht in Ω' zur

$$(1+x^a+x^{2a}+\cdots+x^{(bb'-1)a})\text{-ten}$$

Potenz auf. Denn es ist nach Konstruktion

$$z\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}';\ S\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}'.$$

Der Exponent von $\mathfrak{P}'$ in Ω' ist ein Vielfaches von n gemäß 10. Somit enthält Ω' eine Potenz von $\mathfrak{p}:\mathfrak{p}^u$ und $\left(\frac{\Omega'}{\mathfrak{p}^u}\right)$ ist zu $\mathfrak{p}$ prim. Somit darf man setzen

$$\Omega'^{1-S^{n_1}} = \Omega^{1-S^{n_1}},$$

wo Ω zu $\mathfrak{p}$ prim ist. Man ersetze nur $\mathfrak{p}$ in Ω' durch ein zu $\mathfrak{p}$ in k äquivalentes, zu $\mathfrak{p}$ primes Ideal. Da aber jetzt Ω zu $\mathfrak{p}$ prim ist, so muß

$$\Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}'), \quad \Omega^{1-S^{n_1}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P}')$$

sein (Abschnitt 2. (9.)); also ergibt die obige Kongruenz:

$$(\alpha\,(z^a\alpha)\,(z^{2a}\alpha)\cdots(z^{(b-1)a}\alpha))^{b'} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

oder nach der Relation in Abschnitt 9.:

$$\alpha^{(1+p^a+\cdots+p^{(b-1)a})b'} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

12. Wir hatten aber gefunden, daß n_2 die niedrigste Potenz ist von

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

so daß

$$\alpha^{n_2} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

wird (vergl. Abschnitt 6.). Somit ergibt die am Ende von 11. gefundene Kongruenz:

$$(1+p^a+\cdots+p^{(b-1)a})\,b' \equiv 0 \quad (n_2).$$

Es ist noch zu bemerken, daß $b'=1$ ist, wenn $\mathfrak{p}$ prim ist zur Diskriminante von k.

Die Kongruenz gilt für jeden Teiler a von f, der macht, daß

$$x^a \not\equiv 1 \quad (l)$$

wird. Es ist ferner auch leicht zu sehen, daß die Kongruenz für keinen Teiler a gilt, der dieser Bedingung nicht genügt. Wir wollen das bisherige kurz so zusammenfassen:

Satz: *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k, das in K die n_2-te Potenz eines Ideales wird. Ist dann $\mathfrak{p}$ prim zur Diskriminante von k, so ist*

$$1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{f-a} \equiv 1 \quad (n_2),$$

falls $a>0$ ein solcher Teiler von f ist, daß

$$x^a \not\equiv 1 \quad (l).$$

x ist gegeben durch die Relation $zS=S^xz$, wo z die Substitution des Trägheitskörpers in bezug auf den Zerlegungskörper ist.

13. Wir nehmen jetzt an: b) *Es sei* $x \equiv 1\ (n_2)$.

Dann ist

$$zS^{n_1} = S^{n_1}z.$$

Wir bestimmen wieder Π genau wie in 11. Es muß dann sein

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$
$$(z\Pi)^{1-S^{n_1}} \equiv z\alpha \quad (\mathfrak{P}').$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{\Pi}{z\Pi}\right)^{1-S^{n_1}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P}'),$$

da $\frac{\Pi}{z\Pi}$ eine Zahl ist, deren Zähler und Nenner $\mathfrak{P}'$ in gleicher Potenz enthalten; da diese Zahl also so mit einer zu $\mathfrak{P}'$ primen Zahl von k multipliziert werden kann, daß das Produkt ganz und zu $\mathfrak{P}'$ prim wird.

Es folgt somit

$$\alpha \equiv z\alpha \quad (\mathfrak{p}).$$

α ist also einer Zahl des Zerlegungskörpers kongruent, und da in diesem $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades wird,*) ist α einer ganzen rationalen Zahl nach $\mathfrak{p}$ kongruent. α liegt also im Ring in bezug auf die ganzen rationalen Zahlen. Andrerseits ist aber wieder n_2 die kleinste Zahl, die macht, daß $\alpha^{n_2} \equiv 1\ (\mathfrak{p})$ ist. Somit wird, da die $(p-1)$-te Potenz jeder ganzen rationalen, zu p primen Zahl $\equiv 1\ (p)$ ist:

$$p - 1 \equiv 0 \quad (n_2).$$

Hieraus der **Satz:** *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* k, *das in* K *die* n_2*-te Potenz eines Ideals wird. Es ist dann*

$$p - 1 \equiv 0 \quad (n_2),$$

wenn $x \equiv 1\ (n^2)$ *ist in* $zS = S^x z$, z *die Substitution des Trägheitskörpers in bezug auf den Zerlegungskörper.*

14. Es sei $n_2 = n'n''$, wo n' ein von 1 und n_2 verschiedener Teiler von n_2 sei:

$$1 < n' < n_2.$$

Es sei dann c) $x \equiv 1\ (n')$, $\not\equiv 1\ (ln')$.

---

*) Zahlbericht S. 253, Satz 70.

Wir gebrauchen wieder die gleichen Bezeichnungen, wie im vorhergehenden. Es ist:

$$\Pi^{1-S^{n''n_1}} \equiv \alpha' \quad (\mathfrak{P}')$$

und da $zS^{n''n_1} = S^{n''n_1}z$, so findet man wieder, genau wie in 13., daß

$$p-1 \equiv 0 \quad (n'').$$

Es sei nun aber f' die kleinste Zahl, so daß

$$x^{f'} \equiv 1 \quad (n_2).$$

Dann ist sicher

$$x^{f'-1} + x^{f'-2} + \cdots + x + 1 \equiv 0 \quad (n'').$$

Es sei n^* der größte gemeinsame Teiler von n_2 und

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{f'-1}).$$

Es ist dann $n_2 \geqq n^* \geqq n''$.

Wenn

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

so folgt

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$(z\Pi)^{1-S^{n_1 x}} \equiv z\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(z^{f'-1}\Pi)^{1-S^{n_1 x^{f'-1}}} \equiv z^{f'-1}\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

also

$$\Omega'^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha(z\alpha)(z^2\alpha)\cdots(z^{f'-1}\alpha) \quad (\mathfrak{P}'),$$

wo

$$\Omega' = \Pi(z\Pi)^{1+S^{n_1}+S^{2n_1}+\cdots+S^{n_1(x-1)}} \cdots (z^{f'-1}\Pi)^{1+S^{n_1}+\cdots+S^{n_1(x^{f'-1}-1)}}.$$

Diese Zahl ist durch

$$\mathfrak{P}'^{1+x+x^2+\cdots+x^{f'-1}}$$

teilbar. Der Exponent ist aber durch n^* teilbar, also ist

$$\Omega'^{(1-S^{n_1})\frac{n_2}{n^*}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P}')$$

oder

$$(\alpha(z\alpha)(z^2\alpha)\cdots(z^{f'-1}\alpha))^{\frac{n_2}{n^*}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

Dies ergibt gemäß Abschnitt 9:

$$\alpha^{(1+p+p^2+\cdots+p^{f'-1})\frac{n_2}{n^*}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

Da aber n_2 die kleinste Potenz von α ist, die macht, daß die Kongruenz

$$\alpha^{n_2} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

erfüllt ist, so muß sein

$$1+p+p^2+\cdots+p^{f'-1} \equiv 0 \quad (n^*).$$

Wir haben daher den **Satz:** *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* k, *das in* K *die* n_2*-te Potenz eines Ideals wird. Dann ist*

$$p-1 \equiv 0 \ (n'), \quad 1+p+p^2+\cdots+p^{f'-1} \equiv 0 \ (n^*),$$
$$n'n^* \geqq n_2,$$

falls nur 1. $x-1$ *durch* n' *nicht aber durch* ln' *teilbar ist, wo* $zS = S^x z$ *und* z *die Substitution des Trägheitskörpers in bezug auf den Zerlegungskörper ist; 2.* n^* *der größte gemeinsame Teiler von* n_2 *und* $1+x+\cdots+x^{f'-1}$ *ist, wenn* $x^{f'}$ *die kleinste Potenz von* $x: \equiv 1 \ (p)$ *ist.*

Eine Zusammenfassung der drei letzten Sätze findet sich in der Überschrift des Kapitels.

15. Wir haben bis jetzt stets an der Annahme $p \neq l$ festgehalten und hierbei merkwürdige Beziehungen zwischen den Relativkörpern, deren Relativdiskriminanten p enthalten, und gewissen Ringen und Strahlen des Grundkörpers gefunden. Es soll deshalb auch für die Primzahl l eine solche Beziehung hergestellt werden.

Es sei $\mathfrak{l}$ ein in l enthaltenes Primideal von k; in $\mathfrak{l}$ sei ein Primideal $\mathfrak{L}$ enthalten, das zugleich in der Relativdiskriminante aufgehe. Wir bestimmen wieder ganz gleich n_1 und n_2 $(n_1 n_2 = n)$ für $\mathfrak{l}$. Es ist dann

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L}'^{n_2},$$

wo $\mathfrak{L}'$ ein Ideal von K ist und $\mathfrak{L}' = S\mathfrak{L}'$. Es sei $n_2 = l^{r_2}$ und r_t der Grad der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{l}$ in k. Zur Strahl- und Ringbildung darf man aber jetzt nicht *mehr* $\mathfrak{L}'$ *selbst als Führer gebrauchen, sondern das Ideal*

$$\mathfrak{L}'^{\,r_t r_2 n_2 + 1}$$

Es verhält sich dann alles ganz gleich. Diesen Ringen bezw.

Strahlen entsprechen im Körper k Ringe bezw. Strahlen mit dem Führer

$$\mathfrak{l}^{r_t r_2+1}.$$

Die Klassenanzahl z. B. des Kongruenzstrahles mit dem Führer $\mathfrak{l}^{r_t r_2+1}$ in k ist

$$h_s = l^{f r_t r_2}(l^f-1),$$

wenn die Norm von $\mathfrak{l}$ gleich l^f ist. Die wichtigste Aufgabe und zugleich der Beweis dafür, daß diese Festsetzung die richtige ist, wird durch den Beweis der Richtigkeit des Satzes Abschnitt 7*) in unserem jetzigen Falle ($\mathfrak{p} = l$) gegeben.

Es sei Ω eine Zahl des Strahles

$$\Omega \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{r_t r_2 n_2+1})$$

und zugleich

$$\Omega^{1+S^{m_1}+S^{2m_1}+\cdots+S^{(m_2-1)m_1}} = 1.$$

Dann ist

$$\Omega = \Lambda^{1-S^{m_1}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{r_t r_2 n_2+1}).$$

Wir können $m_1 \geqq n_1$ annehmen; denn wäre $m_1 < n_1$, so würde aus obiger Kongruenz um so mehr folgen

$$\Omega' = \Lambda^{1-S^n} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{r_t r_2 n_2+1}).$$

Wir nehmen also $m_1 \geqq n_1$, $m_1 m_2 = n$ an. Ω ist eine Einheit. Also haben (Λ) und $(S^{m_1}\Lambda)$ den größten gemeinsamen Teiler 1.

Wenn aber Λ den Teiler $\mathfrak{L}''$ mit $\mathfrak{L}'$ gemein hat, so ist sicher $\mathfrak{L}'' = S^{m_1}\mathfrak{L}''$ und wir können den Teiler als einfach in Λ aufgehend denken.**) Denn $\mathfrak{L}''^{m_1}$ ist ja Ideal im Körper K_{m_1}, das aber durch ein zu $\mathfrak{L}'$ primes äquivalentes Ideal ersetzt werden kann. Man braucht deshalb nur eine solche Potenz von Λ zu nehmen, daß die Bedingung erfüllt werden kann. Würde aber $\mathfrak{L}''$ einfach in Λ aufgehen, so wäre

$$\Lambda \equiv S^{m_1}\Lambda \quad (L^{r_t r_2 n_2+2}).$$

Λ genüge der Relativgleichung

$$\Lambda^{m_2} - \lambda_1^{(i)}\Lambda^{m_2-1} + \lambda_2^{(i)}\Lambda^{m_2-2} - \cdots - (-1)^{m_2-1}\lambda_{m_2}^{(i)} = 0,$$

---

*) Vgl. diese Arbeit S. 25.

**) Es kann $\mathfrak{L}''$ auch zu einem durch l teilbarem Exponenten in Λ aufgehen. Dieser Fall erledigt sich aber ebenfalls sofort.

wo die Koeffizienten $\lambda^{(i)}$ alle in K_i liegen, wenn $m_1 = l^i$. Es ist dann

$$\lambda_v \equiv \frac{m_2(m_2-1)\cdots(m_2-v+1)}{1\cdot 2\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ v} \varLambda^v \quad (\mathfrak{L}^{r_t r_2 n_2 + v + 1}),$$

$$(m_2 - v)\,\lambda_v \equiv m_2 \binom{m_2-1}{v} \varLambda^v \quad (\mathfrak{L}^{r_t r_2 n_2 + v + 1}), \qquad (v = 1, 2, \ldots m_2)$$

woraus, da $(m_2 - v)\,\lambda_v$ in K_i liegt, also nur durch eine Potenz von $\mathfrak{L}''^{m_2}$ teilbar sein kann:

$$(m_2 - v)\,\lambda_v \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}^{(r_t(r-i)n_2 + m_2)}); \quad v > 0.$$

Ist $\varDelta$ die Diskriminante der Gleichung für $\varLambda$, so wird daher

$$\varDelta \equiv (-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}} m_2^{m_2} \lambda_{m_2}^{m_2-1} \quad (\mathfrak{L}''^{(r_t(r-i)n_2 + m_2)\,m_2}),$$

$$\varDelta \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{L}^{(r_t(r-i)n_2 + m_2)m_2}).$$

Wegen der Bedingung

$$\varLambda \equiv S^{m_1} \varLambda \quad (\mathfrak{L}''^{r_t r_2 n_2 + 2})$$

muß aber sein*)

$$\varDelta \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}''^{(r_t r_2 n_2 + 2)\,m_2\,(m_2-1)}).$$

Also ist

$$(r_t r_2 n_2 + 2)(m_2 - 1) < r_t (r - i)\, n_2 + m_2,$$

was unmöglich ist, da

$$r_2 > r - i,$$

$$m_2 - 1 \geqq 1;$$

somit ist die Annahme, daß $\varLambda$ einen Teiler mit $\mathfrak{L}'$ gemein hat, zu verwerfen. Man erkennt auch leicht, daß man $\varLambda$ dann immer in den Strahl bringen kann. Daraus der

Satz: *Ist Ω eine Strahlzahl mit dem Führer $\mathfrak{L}'^{r_t r_2 n_2 + 1}$, wo $\mathfrak{L}' = S\mathfrak{L}'$ ein Teiler von $\mathfrak{L}$ ist, so ist Ω die* $(1 - S^{m_1})$-te *symbolische Potenz einer ganzen Zahl des Strahles, falls*

$$\Omega^{1 + S^{m_1} + \cdots + S^{(m_2-1)\,m_1}} = 1, \quad m_1 m_2 = n$$

ist.

16. Um den vollständigen Klassenstrahl zu erhalten, bildet man den Strahl mit sämtlichen in der Relativdiskriminante aufgehenden Primidealen.

*) Vergl. den Beweis S. 23 dieser Arbeit.

Für diesen gelten sämtliche Sätze, wie für den einfachen Strahl. Derselbe heißt *Klassenstrahl.* Für denselben gelten die Sätze des nächsten Kapitels; der größtmögliche Klassenstrahl für einen gegebenen Führer heiße, wie später noch näher ausgeführt wird, **Zahlstern.**

17. *Anwendung auf das Problem der komplexen Multiplikation.*

Wir haben in k nur eine Substitution s, da k quadratisch ist. Es ist

$$sS = S^x s$$

und wir haben über diese Beziehung schon folgendes festgesetzt:*)

Wäre $x \equiv 1\ (n)$, so wäre der Körper K selbst ein *Abel*scher, also durch Einheitswurzeln lösbar.**) Allein solche Gleichungen kommen in der komplexen Multiplikation nicht vor, da die Gleichungen nur durch Adjunktion von Quadratwurzeln zerfallen, aber durch keine weiteren *Abel*schen Größen.***) Es ist also x nur in dem Fall $n = 2$ kongruent 1 nach n, ein Fall der trivial und übrigens im folgenden enthalten ist. Es muß also, da

$$x^2 \equiv 1 \quad (n) \text{ ist,}$$

$$x \equiv -1 \quad (n)\,†)$$

sein und deshalb

$$sS = S^{-1}s$$

werden.

18. Es sei d die Diskriminante des quadratischen Körpers k. Wenn dann $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ ist, so zerfällt p in k in 2 Primideale,††) und der Satz von Abschnitt 6. ergibt, weil $f = 1$:

$$p - 1 = p - \left(\frac{d}{p}\right) \equiv 0 \quad (n_2).$$

Ist dagegen $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, so ist (p) selbst Primideal in k und $z = s$; somit ergibt der Satz Abschnitt 12., daß für jedes ungerade n_2

$$p + 1 = p - \left(\frac{d}{p}\right) \equiv 0 \quad (n_2),$$

*) S. 17 dieser Arbeit.

**) Zahlbericht Satz 131, S. 339.

***) *Weber:* Math. Annalen, Bd. 49, S. 99.

†) Im Fall $n = 2^r$ ist auch $x \equiv -1 + \frac{n}{2}$ möglich.

††) Zahlbericht Satz 97, S. 284.

denn wegen Abschnitt 17. ist immer $(x-1)$ zu n prim. Die Kongruenz ist auch für jede in d aufgehende Primzahl p richtig, da ja r_t für ein in d enthaltenes p stets gleich 2 ist, also zu n_2 prim wird.

Der Satz Abschnitt 14. ergibt, wie sofort ersichtlich, für $l=2$, $n=2^r$ dieselbe Relation

$$1+p=p-\left(\frac{d}{p}\right)\equiv 0 \quad (n_2).$$

Denn $x+1=0$ ist durch n_2 teilbar, also $n_2=n^*$.

Man sieht leicht, daß alle diese Kongruenzen auch in dem Falle gelten, daß p in d aufgeht. Da dann $\left(\frac{d}{p}\right)\equiv 0$ *) wird, andererseits aber $p \neq l$ vorausgesetzt ist, so ersieht man, daß man auf einen Widerspruch stößt. Solche Gleichungen sind deshalb unmöglich. Wir haben den **Satz:** *Jede von l verschiedene Primzahl p, die in K die n_2-te Potenz eines Ideals wird, wo K ein aus den Klassengleichungen der komplexen Multiplikation entspringender Körper ist, genügt einer Kongruenz*

$$p-\left(\frac{d}{p}\right)\equiv 0 \quad (n^2),$$

falls d die Diskriminante von k, dem quadratischen Körper, ist und $\left(\frac{d}{p}\right)$ das Legendresche Symbol.

Kapitel IV. *Der Klassenstrahl und der Stern.*

Hauptsatz: Gegeben ein zu einem gegebenen Körper k relativ Abelscher Körper K vom Relativgrade n und mit einer Gruppe G in bezug auf k. Wir bilden den Strahl in k, dessen Führer f alle in der Relativdiskriminante von K in bezug auf k aufgehenden, von einander verschiedenen Primideale enthält. Dann gibt es in diesem Strahl n Strahlklassen, deren Abelsche Gruppe holoedrisch-isomorph ist mit der Gruppe G.

Bildet man im Körper K den entsprechenden Strahl, dessen Führer alle von einander verschiedenen, in der Relativdifferente aufgehenden Primideale von K enthält, so werden alle jene n Strahlklassen von k Hauptstrahlklassen in dem Strahle von K, der den alten Strahl von k enthält.

---

*) Zahlbericht S. 284, Satz 97.

1. Es sei in unserem *Galois*schen Körper k wieder die irreduzible, relativzyklische Gleichung (1.) Kapitel III gegeben, vom Grade $n = l^r$. Wir denken uns $K = (\Theta, k)$ aufgebaut gemäß Kapitel III, Abschnitt 3 aus $K_1, K_2, \dots K_r = K$. Dann gilt für einen beliebigen Klassenstrahl in K der **Satz:** *Es gibt in* $K_r = K$ *eine Strahleinheit, deren Relativnorm in bezug auf* K_{r-1} *gleich Eins ist und die nicht die* $(1-S)$*-te symbolische Potenz einer Strahleinheit wird.*

Beweis: Wir nehmen die Strahleinheit H von K, deren Relativnorm in bezug auf K_{r-1} gleich Eins ist, und die, mit irgend einer Einheit von K_{r-1} multipliziert, niemals die $(1-S^{\frac{n}{l}})$-te symbolische Potenz einer Strahleinheit wird.*) Dieselbe existiert. Es sei dagegen

$$H = E^{(1-S)^y},$$

wo E irgend eine Strahleinheit und y eine ganze rationale Zahl sei. Dann muß sein

$$y < \frac{n}{l}.$$

Denn wäre

$$y \geqq \frac{n}{l},$$

so kann man setzen

$$(1-S)^{\frac{n}{l}} = f_1(S)\,(1-S^{\frac{n}{l}}) + f_2(S)(1+S^{\frac{n}{l}}+\cdots+S^{(l-1)\frac{n}{l}}),$$

wo f_1, f_2 ganze rationale Funktionen mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Es sei nämlich

$$Z = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so ist $\frac{(1-Z)^{\frac{n}{l}}}{1-Z^{\frac{n}{l}}}$ eine Einheit, und da**) $1, Z, Z^2, \dots Z^{(l-1)\frac{n}{l}}$ eine Basis des Körpers (Z) darstellen, so ist

$$\frac{(1-Z)^{\frac{n}{l}}}{1-Z^{\frac{n}{l}}} = f_1(Z),$$

*) Zahlbericht Satz 92, S. 275. Die dortigen Entwicklungen gelten genau ebenso für jedes Strahlgrundeinheitensystem.

**) Zahlbericht Satz 121, S. 332.

wo f_1 eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten ist. Die algebraische Gleichung

$$(1-x)^{\frac{n}{l}} - f_1(x)\,(1-x^{\frac{n}{l}}) = 0$$

ist somit für $Z=x$ gelöst. Da aber Z der irreduziblen Gleichung*) genügt:

$$1+x^{\frac{n}{l}}+x^{2\frac{n}{l}}+x^{3\frac{n}{l}}+\cdots+x^{(l-1)\frac{n}{l}}=0,$$

so muß sein

$$(1-x)^{\frac{n}{l}} - f_1(x)\,(1-x^{\frac{n}{l}}) = f_2(x)\,(1+x+\cdots+x^{(l-1)\frac{n}{l}}),$$

woraus obige Formel folgt.

Da aber $y \geqq \frac{n}{l}$ sein soll, so wird umsomehr

$$(1-S)^y = f_1^*(S)(1-S^{\frac{n}{l}}) + f_2^*(S)\,(1+S^{\frac{n}{l}}+\cdots+S^{(l-1)\frac{n}{l}})$$

oder

$$H = E^{(1-S)^y} = \varepsilon^{(r-1)}\,(E^{f_1^*})^{1-S^{\frac{n}{l}}}$$

($\varepsilon^{(r-1)}$ eine Einheit von K_{r-1}).

Dies widerspricht der Konstruktion von H. Somit ist $y < \frac{n}{l}$. Wir wählen aber jetzt y so groß, daß E nicht mehr die $(1-S)$-te symbolische Potenz einer Strahleinheit wird. Es sei

$$\varepsilon^{(r-1)} = E^{1+S^{\frac{n}{l}}+\cdots+S^{(e-1)\frac{n}{l}}}.$$

Damit ist $\varepsilon^{(r-1)(1-S)^y} = 1$, also $\varepsilon^{(r-1)(1-S)^{y-1}}$ gleich einer Einheit von k. Hieraus findet man durch Weiterschließen, daß E die gewünschte Strahleinheit ist, oder doch so mit einer neuen multipliziert werden kann, daß das Produkt alle Bedingungen erfüllt.

2. Wir bilden jetzt den *Stern* $*$, d. h. den Klassenstrahl, dessen Führer sämtliche von einander verschiedene in der Relativdiskriminante aufgehende Primideale von K enthält.**) Es sei $\mathfrak{F}$ der Führer dieses Sterns und wir nehmen die Einheit E von Satz 1 dieses Strahles. Dann ist sicher:

$$E = A^{1-S^{\frac{n}{l}}}.$$

---

*) Zahlbericht, Satz 120, S. 331.

**) Die Primzahl l ist im Führer stets gesondert, gemäß Abschnitt 15, Kap. III zu behandeln.

Da E im Strahl liegt, ist A zu allen in der Relativdiskriminante aufgehenden Primidealen prim nach den Sätzen von Kapitel III Abschnitt 7. und 15. Da andererseits $(A) = (S^{\frac{n}{l}} A)$ und (A) eine Strahlzahl ist, so muß (A) ein Strahlideal des Körpers k sein. Wäre dasselbe Hauptstrahl in k, so wäre

$$A = H \cdot \alpha,$$

wo H eine Strahleinheit, α eine Strahlzahl von k wäre. Hieraus folgte:

$$E = H^{1-S^{\frac{n}{l}}}$$

gegen die Definition von E. Also ist (A) nicht Hauptstrahl in k und es ist $\mathfrak{a} = (A) = (SA)$.

Dagegen ist

$$\mathfrak{a}^n = (N(A)) \equiv 1$$

im Strahl von k. Dabei bedeute $N(A)$ die Relativnorm von A in bezug auf k.

Wäre nun

$$\mathfrak{a}^{n'} \equiv 1 \quad (\mathfrak{f}) \quad \text{und} \quad n' < n,$$

so darf man wegen des letzten Resultats n' als Teiler von n annehmen und setzen $n'n'' = n$. Es sei n' die kleinste Potenz von l, die dieser Bedingung genügt. Nun ist wegen $n' < n$, $n'' \geqq l$, also $\frac{n''}{l}$ eine ganze Zahl. Somit wird

$$\mathfrak{a}^{n'} = (A^{1+S^{\frac{n''}{l}}+\cdots+S^{(n'-1)\frac{n''}{l}}}) = \alpha \cdot H,$$

wo α eine Strahlzahl von k, H eine Strahleinheit ist. Somit würde

$$E = A^{1-S^{\frac{n}{l}}} = H^{*1-S^{\frac{n''}{l}}},$$

H^* eine Strahleinheit, was gegen die Definition von E ist. Somit muß $n' = n$ sein und n ist die kleinste Potenz, so daß

$$\mathfrak{a}^n \equiv 1 \quad (\mathfrak{f}).$$

Somit haben wir den **Satz:** *Existiert ein zum Körper k relativzyklischer Körper K vom Relativgrade n, so gibt es im Klassenstrahl des Körpers k, dessen Führer sämtliche von einander verschiedene Primideale der*

*Relativdiskriminante von K in bezug auf k enthält, ein Strahlideal, dessen n-te Potenz die kleinste ist, die Hauptidealstrahl in k ist.**)

3. Es seien nun 2 relativ-zyklische Körper K_1 und K_2 vom selben Relativgrade n in bezug auf k gegeben. Wir bilden den Strahl, dessen Führer alle von einander verschiedenen, in den Relativdiskriminanten beider Körper K_1 und K_2 aufgehenden Primideale enthält. Derselbe sei $\mathfrak{F}$. Wir nehmen jetzt die Strahleinheit E_1 von K_1, in bezug auf k, die so beschaffen ist, wie sie der Satz in 1. verlangt. Es ist dann

$$E_1 = A_1^{1-S_1^{\frac{n}{l}}}$$

und A_1 eine Strahlzahl, (A_1) ein Strahlideal von k. Wenn S_1 die Substitution von K_1, S_2 die von K_2 ist, so muß sein

$$A_1 = S_2 A_1 .$$

Nun bilden wir eine zweite Einheit E_2 des Körpers (k, K_1, K_2), indem wir K_2 als Relativkörper zu (k, K_1) ansehen. Dieselbe habe die Eigenschaften von E_1. Es wird

$$E_2 = A_2^{1-S_2^{\frac{n}{l}}},$$

A_2 eine Strahlzahl, und wieder ein Strahlideal von k. Dieses Resultat wird ohne Mühe durch Heranziehung der relativen Strahlgrundeinheiten eingesehen.

Wäre nun aber

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} = \alpha \cdot H$$

und α eine Strahlzahl von k, H eine Strahleinheit, so wäre wegen $A_1 = S_2 A_1$:

$$E_2^{x_2} = A_2^{x_2(1-S_2^{\frac{n}{l}})} = H^{1-S_2^{\frac{n}{l}}},$$

was unmöglich ist nach der Definition von E_1, wenn nicht $x_2 \equiv 0\ (l)$ ist. Es kommt überhaupt nur auf die in x_2 aufgehende Potenz von l an und wir nehmen gleich an:

$$x_2 = l^i; \qquad (i < r)$$

also ergibt die obige Beziehung

$$A_2^{l^i(1-S_2)} = H^{1-S_2}.$$

*) Vergl. Zahlbericht Satz 94, S. 279.

Nun ist aber wegen $(A_2) = (S_2 A_2)$

$$A_2^{l^i} = H^* A_2^{1+S_2+S_2^2+\cdots+S_2^{l-1}},$$

wo H^* eine Einheit ist. Also

$$A_2^{1-S^{l^i}} = (H H^{*-1})^{1-S_2},$$

woraus

$$E_2 = A_2^{1-S_2 \frac{n}{l}} = H^{**1-S_2}$$

gegen die Definition von E. Es muß also $i = r$, oder $x_2 = n$, daher auch $x_1 = n$ sein, und es gibt somit zwei von einander unabhängige Strahlklassen in k, deren n-te Potenz erst Hauptstrahl in k wird.

Dadurch erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Satz: *Gegeben ein zu einem gegebenen Körper k relativ Abelscher Körper K vom Relativgrad n und der Gruppe G in bezug auf k. Wir bilden den Strahl in k, dessen Führer* $\mathfrak{f}$ *alle in der Relativdiskriminante von K in bezug auf k aufgehenden, von einander verschiedenen Primideale von k enthält. Dann gibt es in diesem Strahl n Strahlklassen, deren Abelsche Gruppe holoedrisch isomorph ist mit der Gruppe in G.*

Bildet man im Körper K den entsprechenden Strahl, dessen Führer $\mathfrak{F}$ *alle von einander verschiedenen, in der Relativdiskriminante aufgehenden Primideale von K enthält, so werden alle jene n Strahlklassen von k Hauptstrahlklassen in dem Strahl von K.*

Hierin liegt der Grund, warum wir den Strahl mit dem Führer $\mathfrak{F}$ den *Klassenstrahl* genannt haben. Der größtmögliche Klassenstrahl, zu einem gegebenen Führer $\mathfrak{f}$, heißt **Stern des Führers** $\mathfrak{f}$.
